第 28 講　微分法・積分法(1)

【基礎確認事項】

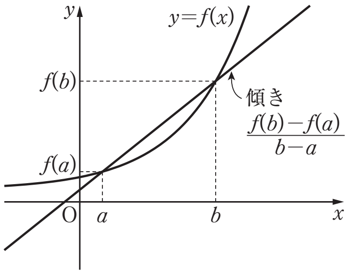
［１］　平均変化率と微分係数

□関数 $f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき，関数の値は $f(a)$ から $f(b)$ まで変化する．このとき，x の値の変化に対する関数 $f(x)$ の変化の割合

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を，$x=a$ から $x=b$ までの $f(x)$ の**平均変化率**という．

この平均変化率は，$y=f(x)$ のグラフ上の２点 A$(a,\ f(a))$，B$(b,\ f(b))$ を通る直線の傾きを表している．



□関数 $f(x)$ において，x が a 以外の値をとりながら，限りなく a に近づくとき，それに応じて $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づく場合，この値 α を x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の**極限値**という．これを次のように表す．

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \qquad \text{または} \qquad x\to a \text{ のとき } f(x)\to\alpha$$

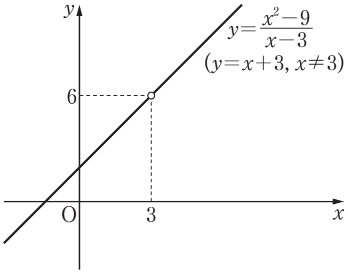
$x\to a$ のときの極限値を考えるときには，$f(x)$ が $x=a$ で定義されていない場合がある．したがって，x が「a 以外の値をとりながら」とするのである．

例　$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$　は，分母が 0 になる $x=3$ では定義されていない．

x が 3 以外の値，すなわち $x\neq 3$ のとき

$$f(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$$

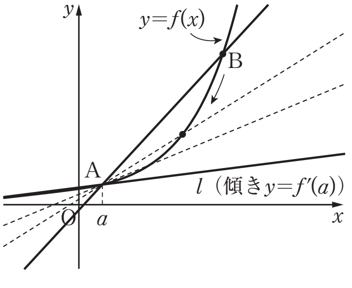
となる．よって $x\to 3$ のとき $f(x)\to 6$ であり，このことを $\lim_{x\to 3} f(x)=6$　と書くことができる．



□さて，平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ において，b を限りなく a に近づけるとき，ある一定の値に限りなく近づくならば，その値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**（または変化率）といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ と表す．つまり，$f'(a)=\lim_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$　である．

□A$(a,\ f(a))$，B$(b,\ f(b))$ とすると，$b\to a$ のとき直線 AB は点 A を通り傾きが $f'(a)$ の直線 ℓ に限りなく近づく．この直線 ℓ を $f(x)$ の点 A における**接線**といい，点 A を**接点**という．

つまり $f'(a)$ は，関数 $f(x)$ の点 A における接線の傾きを表す．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

微分係数

$$f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

※$b-a=h$ とおくと $b=a+h$ であり，$b\to a$ のとき $h\to 0$ である．

⇒ C&U 1

［2］ 導関数

□関数 $f(x)$ が与えられたとき，x のそれぞれの値 a に対して，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を対応させると，a の関数 $f'(a)$ が得られる．この a を x に置き換えることにより，x の関数 $\boldsymbol{f'(x)}$ が得られる．この $f'(x)$ を，$f(x)$ の**導関数**という．

導関数　$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

□関数 $y=f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を**微分する**という．とくに変数 x を強調するときには x で微分する，という．

$y=f(x)$ の導関数を表すのに，$f'(x)$ のほかに y'，$\dfrac{dy}{dx}$（ディーワイ・ディーエックス），

$\dfrac{d}{dx}f(x)$（ディー・ディエックス・エフエックス）といった記号も用いられる．

□$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ において，x の変化量 h を **x の増分**といい，$\boldsymbol{\Delta x}$ と表す．

また，このときの y の変化量 $x(x+h)-f(x)$ を **y の増分**といい，$\boldsymbol{\Delta y}$ と表す．このとき

平均変化率は　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$　　導関数は　$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

と表される．

□一般に，次の公式が成り立つ．

導関数の公式

n が自然数のとき，関数 $y=x^n$ の導関数は　$y'=nx^{n-1}$

c が定数のとき，定数関数 $y=c$　の導関数は　$y'=0$

□また，関数 x^n の導関数を $(x^n)'$ で表すと，次のことが成り立つ．

$\{k\cdot f(x)\}'=k\cdot f'(x)$　　$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　（積の微分）

⇒ C&U 2

［3］ 接線と法線

□曲線 C：$y=f(x)$ に対して，C 上の1点 A$(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ で表される．当然ながら接線は接点 A を通る．したがって，以下のことがいえる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

接線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

□曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ を通り，点 A における接線と直交する直線を，点 A における曲線の法線という．接線の傾きと法線の傾きの積は -1 である．したがって，以下のことがいえる．

法線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$$

⇒　C&U 3

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　関数 $f(x)=3x^2-2x-1$ の $x=-1$ における微分係数を定義に従って求めよ．

2　次の関数を微分せよ．

(1)　$y=5x^2-3x+7$　　(2)　$y=(4x^2+5)(2x-3)$

3　関数 $y=x^3-3x^2+5$　上の点 A(1，3) における接線の方程式を求めよ．また，点 A における法線の方程式を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第28講　微分法・積分法(1)

1　$f(x)=x^3-3x$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$x=1$ から $x=2$ まで変化するときの平均変化率を求めよ．

(2)　$x=c$ から $x=c+h$ まで変化するときの平均変化率，および $x=c$ における微分係数 $f'(c)$ を求めよ．

(3)　(2)で求めた微分係数が，(1)で求めた平均変化率と等しいとき，c の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) $y=x^3-5x+1$ 上の点 A$(2,\ -1)$ における接線の方程式を求めよ.

(2) 点 $(1,\ 8)$ から曲線 $y=x^3-x^2-8x+8$ に引いた接線の方程式を求めよ.

(3) 点 $(3,\ 4)$ を通る傾き m の直線が，放物線 $y=-x^2+4x-3$ に接するとき，m の値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　2 曲線 $y=x^3-3x$ と $y=-x^2+ax+b$ が点 $(2,\ 2)$ で接するとき，a，b の値を求めよ．

［2］　2 つの放物線　$y=-x^2$ と $y=x^2-2x+5$ の共通接線の方程式を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 28 講　微分法・積分法(1)

2 つの放物線 C_1：$y=x^2-5x+7$，C_2：$y=x^2+3x-1$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C_1 上の点 (1，3) における接線は　$y=-$ [ア] $x+$ [イ] である．

(2)　C_1 の $x=s$ における接線は　$y=($ [ウ] $s-$ [エ] $)x-s^2+$ [オ] であり，C_2 の $x=t$ における接線は

$y=($ [カ] $t+$ [キ] $)x-t^2-$ [ク] である．よって C_1 と C_2 の両方に接する直線は　$y=x-$ [ケ] である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 28 講　微分法・積分法(1)

【CHECK & UP】

1

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{3(-1+h)^2-2(-1+h)-1\}-\{3\cdot(-1)^2-2(-1)-1\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3h^2-8h+4)-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2-8h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3h-8)}{h}=\lim_{h\to 0}(3h-8)=\mathbf{-8}$$

微分の「公式」を知っている人も，定義，すなわち「平均変化率」から極限の考え方を使って微分係数を求める流れを確認しておくこと．なぜこの微分係数が「接線の傾き」を表すのかを忘れないためでもある．h を 0 に「限りなく近づけた」時の値が -8 に「限りなく近づく」．h に 0 を代入するので -8 に「なる」と錯覚しやすいので注意．

2

(1)　$y'=5(x^2)'-3(x)'+(7)'=5\cdot 2x-3\cdot 1+0$

$=\mathbf{10x-3}$

(2)　$y=8x^3-12x^2+10x-15$ より　$y'=\mathbf{24x^2-24x+10}$

【別解】　$y'=(4x^2+5)'(2x-3)+(4x^2+5)(2x-3)'$

$=8x(2x-3)+(4x^2+5)\cdot 2$

$=24x^2-24x+10$

導関数，いわゆる微分の公式を利用して微分する．
(1)は基本問題．1 行目は考え方であり，実際には 2 行目の答えにダイレクトでたどり着く必要がある．
(2)は展開してから微分する問題であるが，【別解】のように「積の微分の公式」(数Ⅲ) を利用して解くこともできる．

3

$y=x^3-3x^2+5$ より　$y'=3x^2-6x$

$x=1$ のとき　$y'=-3$

よって点 A$(1,\ 3)$ における

接線の方程式は　$y=-3(x-1)+3$　よって　$\mathbf{y=-3x+6}$

法線の方程式は　$y=\frac{1}{3}(x-1)+3$　よって　$\mathbf{y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}}$

微分の公式を利用すれば，微分係数が簡単に求められる．この微分係数が接線の傾きとなる．傾きと通る 1 点で直線の方程式が定まるが，この通る点は，接線や法線にとっては微分係数を出す時に使った点，すなわち「接点」である．他に通る点が与えられたとしても，接線や法線を作る際に用いるべきはこの接点の座標である．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 28 講　微分法・積分法(1)

1　$f(x)=x^3-3x$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$x=1$ から $x=2$ まで変化するときの平均変化率を求めよ．

(2)　$x=c$ から $x=c+h$ まで変化するときの平均変化率，および $x=c$ における微分係数 $f'(c)$ を求めよ．

(3)　(2)で求めた微分係数が，(1)で求めた平均変化率と等しいとき，c の値を求めよ．

(1)　$\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=(2^3-3\cdot2)-(1^3-3\cdot1)=\mathbf{4}$

(2)　平均変化率は

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\frac{\{(c+h)^3-3(c+h)\}-(c^3-3c)}{h}$$

$$=\frac{3c^2h+3ch^2+h^3-3h}{h}=\boldsymbol{3c^2+3ch+h^2-3}$$

よって　$f'(c)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to0}(3c^2+3ch+h^2-3)=\boldsymbol{3c^2-3}$

(3)　$3c^2-3=4$　より　$c^2=\dfrac{7}{3}$　　よって　$\boldsymbol{c=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{3}}$

2　(1)　$y=x^3-5x+1$ 上の点 A$(2,\ -1)$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　点 $(1,\ 8)$ から曲線 $y=x^3-x^2-8x+8$ に引いた接線の方程式を求めよ．

(3)　点 $(3,\ 4)$ を通る傾き m の直線が，放物線 $y=-x^2+4x-3$ に接するとき，m の値を求めよ．

(1)　$f(x)=x^3-5x+1$ とおくと，$f'(x)=3x^2-5$

点 A における接線の傾きは　$f'(2)=7$

よって求める接線の方程式は　$y=7(x-2)-1$　よって　$\boldsymbol{y=7x-15}$

(2)　$f(x)=x^3-x^2-8x+8$ とおくと

$f'(x)=3x^2-2x-8$ より　$f'(t)=3t^2-2t-8$

よって接点の x 座標を t とおくと，$x=t$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2-2t-8)(x-t)+t^3-t^2-8t+8$$

つまり　$y=(3t^2-2t-8)x-2t^3+t^2+8$

この直線が点 $(1,\ 8)$ を通るとき，

$$8=3t^2-2t-8-2t^3+t^2+8$$

$$t^3-2t^2+t+4=0$$

$$(t+1)(t^2-3t+4)=0 \qquad t^2-3t+4=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0 \quad より \quad t=-1$$

よって求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=-3x+11}$

(3)　$f(x)=-x^2+4x-3$ とおくと　$f'(x)=-2x+4$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$x=t$ における接線の方程式は

$y=(-2t+4)(x-t)-t^2+4t-3$

つまり　$y=(-2t+4)x+t^2-3$

この直線が (3, 4) を通るとき

$4=(-2t+4)\cdot 3+t^2-3$

$t^2-6t+5=0$　　　$t=1,\ 5$

このとき接線の傾きはそれぞれ　2, −6　　したがって　$\boldsymbol{m=2,\ -6}$

---

③［1］ 2 曲線 $y=x^3-3x$ と $y=-x^2+ax+b$ が点 (2, 2) で接するとき，a，b の値を求めよ．

$f(x)=x^3-3x$ とおくと　$f'(x)=3x^2-3$

$g(x)=-x^2+ax+b$ とおくと　$g'(x)=-2x+a$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が点 (2, 2) で接するので

$f(2)=g(2)$　かつ　$f'(2)=g'(2)$

つまり　$2=-4+2a+b$　かつ　$9=-4+a$

よって　$\boldsymbol{a=13,\ b=-20}$

---

③［2］ 2 つの放物線　$y=-x^2$ と $y=x^2-2x+5$ の共通接線の方程式を求めよ．

$y=-x^2$　より　$y'=-2x$

この放物線上の点 $(t,\ -t^2)$ における接線の方程式は

$y=-2t(x-t)-t^2$　　つまり　$y=-2tx+t^2$　……①

$y=x^2-2x+5$　より　$y'=2x-2$

この放物線上の点 $(s,\ s^2-2s+5)$ における接線の方程式は

$y=(2s-2)(x-s)+s^2-2s+5$　つまり　$y=(2s-2)x-s^2+5$　……②

①と②が一致するとき　$-2t=2s-2$　かつ　$t^2=-s^2+5$

これらより　$t=-1,\ 2$　　　このとき　$s=2,\ -1$

よって求める共通接線の方程式は $\boldsymbol{y=2x+1,\ y=-4x+4}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 28 講　微分法・積分法(1)

2 つの放物線 C_1：$y=x^2-5x+7$，C_2：$y=x^2+3x-1$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C_1 上の点 (1，3) における接線は　$y=-$［ア］$x+$［イ］である．

(2)　C_1 の $x=s$ における接線は　$y=($［ウ］$s-$［エ］$)x-s^2+$［オ］であり，C_2 の $x=t$ における接線は

$y=($［カ］$t+$［キ］$)x-t^2-$［ク］　である．よって C_1 と C_2 の両方に接する直線は　$y=x-$［ケ］である．

C_1：$y=x^2-5x+7$　より　$y'=2x-5$

C_2：$y=x^2+3x-1$　より　$y'=2x+3$

(1)　C_1 上の点 (1，3) における接線の方程式は

$y=-3(x-1)+3$　より　$y=\mathbf{-3}x+\mathbf{6}$

(2)　C_1 の $x=s$ における接線は

$y=(2s-5)(x-s)+s^2-5s+7$　より　$y=(\mathbf{2}s-\mathbf{5})x-s^2+\mathbf{7}$　……①

C_2 の $x=t$ における接線は

$y=(2t+3)(x-t)+t^2+3t-1$　より　$y=(\mathbf{2}t+\mathbf{3})x-t^2-\mathbf{1}$　……②

①，②より

$2s-5=2t+3$　……③

$-s^2+7=-t^2-1$　……④

③より　$s=t+4$

これを④に代入して　$-(t+4)^2+7=-t^2-1$

$-8t=8$　　$t=-1$　　このとき　$s=3$

よって　C_1 と C_2 の両方に接する直線は　$y=x-\mathbf{2}$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。